

Correction Devoir maison n°6

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x}$$

1. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{x \ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

La courbe représentative de f admet une asymptote verticale en 0.

2. On a

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x} &= \frac{x \ln(x) \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right)}{x} \\ &= \ln(x) \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De même

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} = \frac{x \ln(x) - 1}{x^2} &= \frac{x \ln(x) \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)}{x} \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x \ln(x)}\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (\text{par croissance comparée})$$

Ainsi

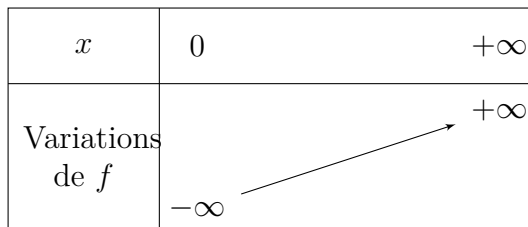
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

3. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle. Donc, $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln(x) + 1)x - (x \ln(x) - 1)}{x^2} \\ &= \frac{x + 1}{x^2} > 0 \end{aligned}$$

4. On trace les variations de la fonction f .

x	0	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$+\infty$



5. On applique le théorème de la bijection
- La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*
 - La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^*
 - On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(e) = \frac{e-1}{e} > 0$.

Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in [1, e]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 2 : Dénombrement

Pour son vélo, Paul possède un antivol à code. Le code est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9. Il y a donc ordre et remise, on utilise donc les p -listes. Soit $E = \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

1. On cherche l'ensemble des 3-listes de E . Il y a donc $10^3 = 1000$ combinaisons possibles.
2. Il n'y a que les 2 derniers chiffres à trouver. On cherche donc l'ensemble des 2-listes de E . Il y a donc $10^2 = 100$ combinaisons possibles.
3. On note P l'ensemble des entiers pairs. L'ensemble des codes se terminant par un chiffre pair est $E \times E \times P$. Ainsi, Le nombre de codes possible est $10 \times 10 \times 5 = 500$.
4. L'ensemble des codes ne contenant que des chiffres pairs est l'ensemble des 3-listes de P . Ainsi, il y a $5^3 = 125$ codes possibles ne contenant que des nombres pairs.
5. De la même façon, il y a 125 codes possibles ne contenant que des nombres impairs.
6. On pose $A = \{\text{codes ayant au moins un chiffre pair}\}$.
 $\bar{A} = \{\text{codes n'ayant aucun chiffre pair}\}$ et $E = \{\text{codes}\}$.

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\bar{A}) = 10^3 - 5^3$$

7. $A = \{\text{codes dont le premier chiffre est l'unique chiffre pair}\}$ donc $\text{Card}(A) = 5 \times 5 \times 5 = 125$.
 Il reste maintenant à choisir la place de ce chiffre pair, soit 3 possibilités d'où $3 \times 125 = 375$.

1 Exercice 3 - EMLyon 2011

On considère la fonction

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}$$

1. Pour tout x de $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln(x)) e^{x-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1} \end{aligned}$$

2. Soit $g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$
 g est dérivable sur $]0; +\infty[$ (car $x > 0$ et $x \neq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$)

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

donc

x	0	1	$+\infty$
Signe de $x-1$	-	0	+
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variation de g			

et donc 1 est un minimum de la fonction g .

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0}$$

3. on a donc pour tout $x \in]0; +\infty[$

$$x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + 1 + x > 0$$

car $1 + x \geq 0$

$$\text{Conclusion : } \boxed{x \in]0; +\infty[\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.}$$

4. On a donc $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[}$
 5. On cherche la limite de f en 0. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln(x)) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1}$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln(x)) e^{x-1} = -\infty.}$$

On a également

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x)) e^{x-1} = +\infty}$$

x	0	1	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	1	$+\infty$

et $f'(1) = 3$ pente de la tangente en 1.

6. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et on a donc une asymptote verticale